

반복형 위너 필터 방법에 기반한 재귀적 완전 최소 자승 알고리즘의 견실화 연구

A study on robust recursive total least squares algorithm based on iterative Wiener filter method

임준석[†]

(Jun Seok Lim^{1†})

¹세종대학교 전자정보통신공학과

(Received February 26, 2021; accepted April 16, 2021)

초 록: 입력과 출력에 동시에 잡음이 존재하는 경우 최소 자승법 보다는 완전 최소 자승법이 더 우수한 추정 성능을 보인다는 것이 알려져 있다. 완전 최소 자승법을 시계열 특성을 가지는 데이터에 적용할 경우 보다 실시간 성능을 더하기 위해서 Recursive Total Least Squares(RTS) 알고리즘이 제안되어 있다. RTLS는 알고리즘 내에 존재하는 역행렬 계산에서 수치적인 불안정성을 지닌다. 본 논문에서는 RTLS와 유사한 수렴성을 지닐 뿐만 아니라 수치적 불안정성을 줄이기 위한 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘을 위해서 Iterative Wiener Filter(IWF)를 적용한 새로운 RTLS를 제안한다. 시뮬레이션을 통해서 수렴성이 기존의 RTLS와 유사할 뿐만 아니라 수치적 견실성이 기존 RTLS보다 향상되었다는 것을 보인다.

핵심용어: 완전 최소 자승, 재차 위너 필터, 수치적 견실화, 재차형 알고리즘

ABSTRACT: It is known that total least-squares method shows better estimation performance than least-squares method when noise is present at the input and output at the same time. When total least squares method is applied to data with time series characteristics, Recursive Total Least Squares (RTS) algorithm has been proposed to improve the real-time performance. However, RTLS has numerical instability in calculating the inverse matrix. In this paper, we propose an algorithm for reducing numerical instability as well as having similar convergence to RTLS. For this algorithm, we propose a new RTLS using Iterative Wiener Filter (IWF). Through the simulation, it is shown that the convergence of the proposed algorithm is similar to that of the RTLS, and the numerical robustness is superior to the RTLS.

Keywords: Total least squares, Iterative Wiener Filter (IWF), Numerical robustness, Recursive algorithm

PACS numbers: 43.60.Dh, 43.60.Mn

1. 서 론

잡음 섞인 데이터를 사용하는 시스템 인식 문제는 출력에 잡음이 부가된 경우뿐 아니라, 때에 따라 입력에도 잡음이 부가되는 경우도 포함한다. 전형적인 최소 자승 알고리즘(Least Squares, LS)은 출력에만

잡음이 부가된 경우에 최적의 시스템 인식을 해내는 것으로 알려져 있다. 입력과 출력이 동시에 잡음에 오염된 경우에 시스템인식은 완전 최소 자승법(Total Least Squares, TLS)이 최소 자승법보다 좋은 결과를 낸다고 알려져 있다.^[1,2] Choi *et al.*^[3]에 의해서 Recursive Least Squares(RLS)와 유사한 방법으로 계

[†] Corresponding author: Jun Seok Lim (jslim@sejong.ac.kr)

Department of Electrical Engineering, Sejong University, Neung dong-ro, Gwangjin-gu, Seoul 05006, Republic of Korea
(Tel: 82-2-3408-3299, Fax: 82-2-3408-4329)



Copyright©2021 The Acoustical Society of Korea. This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

산하는 Recursive Total Least Squares(RTLS)를 제안하였다. 이 알고리즘은 다른 연구자들에 의해서 인용 발전되었다.^[4-8]

Reference [3]에서 제안된 알고리즘은 RLS의 재귀적 갱신법을 충분히 이용하고 있어서 실시간으로 관측되는 데이터를 사용할 경우에 잘 맞는 방법이지만 RLS가 지닌 단점 또한 함께 가지고 있다. 즉 알고리즘 상에 자기 상관 행렬의 역행렬을 계산하는 과정에 수치적 불안정성이 내재되어 있다. 이런 수치상 불안정 상태의 주된 원인중 하나가 자기상관 행렬의 역행렬에 대칭성이 유지되지 못할 때라는 것이 알려져 있다.^[9]

본 논문은 RTLS와 유사한 성능을 내면서도 역행렬이 내재되어 있지 않은 RTLS 알고리즘을 제안한다. 이를 위해서 Iterative Wiener Filter(IWF)^[10] 방법을 응용한 새로운 RTLS 알고리즘을 제안한다. IWF^[10]는 Xi 등이 제안한 역행렬이 내재되어 있지 않은 RLS 대체 알고리즘이다. 이 알고리즘의 수렴 성능은 전통적인 RLS와 유사한 것이 알려져 있다. 그리고 후속 연구에서 IWF기반 알고리즘이 수치적 불안정성도 매우 개선됨도 보였다.^[11] 따라서 제안된 RTLS 알고리즘은 전통적인 RTLS와 유사한 수렴 특성을 지니면서 수치적 안정성이 개선된 특성을 지닌다.

본 논문은 2장에 기존의 RTLS를 정리하고, 3장에 새로운 알고리즘을 제안한다. 4장에는 시뮬레이션을 통해서 새 알고리즘의 성능이 기존의 RTLS와 유사함을 보이고, 또 양자화 오차에 대한 견실성도 있음을 보인다.

II. RLS(Recursive Least Squares) and RTLS(Recursive Total Least Squares)

미지의 시스템이 주어지고, 입력과 출력 양쪽에 잡음이 부가된 경우를 가정할 때, Fig. 1과 같이 모델링 할 수 있다. 그리고 그 미지의 시스템은 다음과 같이 기술 된다.

$$\mathbf{w} = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{N-1}]^H \in \mathbb{C}^{N \times 1}, \quad (1)$$

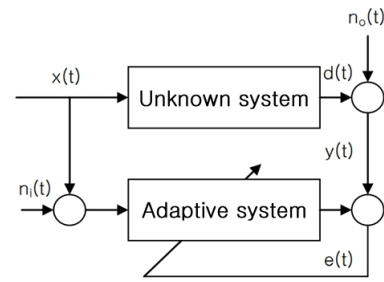


Fig. 1. The model of noisy system model.

여기서 \mathbf{w} 는 시변 또는 시불변 이다. 출력은 다음과 같다.

$$d(k) = \mathbf{x}^H(k) \mathbf{w} + n_0(k), \quad (2)$$

여기서 $n_0(k)$ 는 출력 잡음이고 σ_n^2 의 분산을 갖는 정규분포를 따른다. 잡음이 없는 입력신호 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(k) = [x(k) \quad x(k-1) \quad \dots \quad x(k-N+1)]^T. \quad (3)$$

그리고 앞서와 같은 환경에서 최소자승법을 사용하여 시스템 파라미터를 인식하기 위해서 다음과 같은 최적화용 비용 함수를 사용한다.

$$\min E\{e_{LS}^2(k)\}, \quad (4)$$

여기서 k 번째 표본에 대한 추정 오차 $e_{LS}(k)$ 는 다음과 같다.

$$e_{LS}(k) = y(k) - \mathbf{w}_{LS}^T(k) \mathbf{x}(k) = y(k) - y_{LS}(k). \quad (5)$$

RLS 알고리즘은 위 최소 자승 풀이를 위한 재귀 형식 알고리즘이다.^[3] 이 알고리즘의 매 단계 과정은 다음 Table 1과 같다.

Eq. (2)와 같이 출력에 잡음이 낀 경우와 함께, 다음과 같이 입력에도 σ_i^2 의 분산을 갖는 백색 정규 분포를 따르는 잡음이 낀 경우

Table 1. Summary of RLS algorithm from Reference [3].

$$\begin{aligned}
y_{RLS}(k) &= \mathbf{w}_{RLS}^T(k) \mathbf{x}(k) \\
\mathbf{k}(k) &= \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}(k-1) \bar{\mathbf{x}}(n)}{1 + \lambda^{-1} \bar{\mathbf{x}}^H(k) \mathbf{P}(k-1) \bar{\mathbf{x}}(k)} \\
\mathbf{P}(k) &= \lambda^{-1} \mathbf{P}(k-1) - \lambda^{-1} \mathbf{k}(k) \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \\
\mathbf{w}_{RLS}(k+1) &= \mathbf{w}_{RLS}(k) + \mathbf{k}(k) (d(k) - y_{RLS}(k)) \mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

Table 2. Summary of RTLS algorithm from Reference [3].

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}(k) &= \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}(k-1) \bar{\mathbf{x}}(n)}{1 + \lambda^{-1} \bar{\mathbf{x}}^H(k) \mathbf{P}(k-1) \bar{\mathbf{x}}(k)} \\
\mathbf{P}(k) &= \lambda^{-1} \mathbf{P}(k-1) - \lambda^{-1} \mathbf{k}(k) \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \\
\tilde{\mathbf{w}}(k) &= \mathbf{P}(k) \tilde{\mathbf{w}}(k-1) \\
\mathbf{w}_{RLS}(k+1) &= \tilde{\mathbf{w}}_{(1:N)}(k+1) / (-\tilde{\mathbf{w}}_{(N+1)}(k+1))
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{x}(n) + \mathbf{n}_i(n) \in C^{N \times 1}. \quad (6)$$

완전 최소 자승법이 최적의 해를 제공 한다.^[1,2] Reference [3]의 저자들에 의해서 완전 최소 자승법을 재귀형으로 만든 Recursive Total Least Squares(RTLS) 알고리즘이 제안되었다. RTLS알고리즘은 다음과 같은 비용함수의 최소화로부터 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\min \frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{w}}} \quad (7) \\
\text{and } \mathbf{w}_{RLS} = \tilde{\mathbf{w}}(1:N) / (-\tilde{\mathbf{w}}(N+1)),
\end{aligned}$$

여기서 $\bar{\mathbf{x}}(n) = [\bar{\mathbf{x}}^T(k), d(k)]^T \in C^{N+1}$ 이고 $\bar{\mathbf{R}} = E\{\bar{\mathbf{x}}(k) \bar{\mathbf{x}}^H(k)\}$ 이다. 이 알고리즘은 형식이 위의 Table 1과 유사한 재귀 형식이고 전체 알고리즘은 Table 2와 같다.

III. IWF 기반 RTLS(Recursive Total Least Squares)

IWF^[10]방법을 기반으로 하여 역행렬 연산이 없는 RTLS를 구현하기 위해서 Eq. (7)의 목적함수를 다음과 같이 변형하였다.

$$\tilde{J}(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{R}} \mathbf{w} - \ln(\mathbf{w}^H \mathbf{w}) \right) \quad (8)$$

$$\text{and } \mathbf{w}_{RLS} = \tilde{\mathbf{w}}(1:N) / (-\tilde{\mathbf{w}}(N+1)).$$

위 목적함수에 대해서 Reference [10]에 IWF 알고리즘 개발 방법을 적용하면 다음과 같은 갱신식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mu(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}(\mathbf{w}(k)), \\
&= \mathbf{w}(k) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k
\end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k = \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}(\mathbf{w}(k))$ 이고 그 자세한 식은 다음과 같다.

$$\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k = \bar{\mathbf{R}}(k) \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}(k) (\mathbf{w}^H(k) \mathbf{w}(k))^{-1}. \quad (10)$$

그리고 갱신식의 갱신 스텝 사이즈는 다음과 같이 목적함수를 스텝 사이즈로 미분한 것으로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu} \tilde{J}_k \quad (11) \\
&= -\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k) (\mathbf{w}(k) - \mu(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k) \\
&\quad + \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H (\mathbf{w}(k) - \mu(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k)}{\mathbf{w}^H(k+1) \mathbf{w}(k+1)} \\
&\approx -\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k) \mathbf{w}(k) + \mu(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k \\
&\quad + \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \mathbf{w}(k)}{\mathbf{w}^H(k) \mathbf{w}(k)} - \mu(k) \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k}{\mathbf{w}^H(k) \mathbf{w}(k)}
\end{aligned}$$

이고, Eq. (12)와 같이 Eq. (11)이 '0'이 되는 스텝 사이즈를 구하면 Eq. (13)과 같은 스텝 사이즈를 구할 수 있다.

$$\nabla_{\mu} \tilde{J}(\mathbf{w}(k)) = 0. \quad (12)$$

$$\mu(k) = \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k) \mathbf{w}(k) - \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \mathbf{w}(k)}{\mathbf{w}^H(k) \mathbf{w}(k)}}{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k) \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k - \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k^H \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{J}_k}{\mathbf{w}^H(k) \mathbf{w}(k)}}. \quad (13)$$

Table 3. Summary of the proposed RTLS algorithm.

Initialize $\bar{\mathbf{R}}(0), \mathbf{x}(0), \mathbf{w}(0), \lambda$
$\bar{\mathbf{R}}(k) = \lambda \bar{\mathbf{R}}(k-1) + \mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^H$
$\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k = \bar{\mathbf{R}}(k)\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}(k)(\mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k))^{-1}$
$\mu(k) = \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k)\mathbf{w}(k) - \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k^H \mathbf{w}(k)}{\mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k)}}{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k^H \bar{\mathbf{R}}(k)\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k - \frac{\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k^H \nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k}{\mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k)}}$
$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu(k)\nabla_{\mathbf{w}} \tilde{\mathcal{J}}_k$

이와 같이 IWF를 적용한 새로운 RTLS 알고리즘을 정리하면 다음 Table 3과 같다.

IV. 시뮬레이션을 통한 성능 검증

4.1 채널 추정을 통한 기존 RTLS의 성능 비교

본 실험에서는 총 64차의 가상의 유한 임펄스 응답을 갖는 채널을 사용하였다. 채널의 다양성을 위해서 64개의 임펄스 응답 계수 중 임의로 각각 32개, 16개, 8개의 영이 아닌 계수를 갖는 3종류의 가상 채널을 발생 시켜서 각각 100 회씩 반복 실험을 하였다. 반복 실험 시에 영이 아닌 계수의 위치와 크기를 각각 $N(0, 1/(\text{영이 아닌 계수의 갯수}))$ 인 정규 분포를 갖도록 발생시켰다.

실험에서 본 논문에서 제안한 RTLS와 Reference [3]에서 제안한 기존 RTLS 및 제안한 알고리즘의 모태인 Reference [10]의 IWF 알고리즘의 추정 성능을 서로 비교하여 Fig. 2에 나타내었다. Fig. 2는 다음 식으로 정의된 평균 표준 편차(Mean Standard Deviation, MSD) 곡선을 보여준다.

$$\text{MSD} = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{w}_{\text{true}} - \mathbf{w}_{\text{estim}}|^2}{|\mathbf{w}_{\text{true}}|^2}. \quad (14)$$

Fig. 2의 결과는 제안된 알고리즘의 추정 성능이 기존 RTLS와 유사함을 보이고 있다.

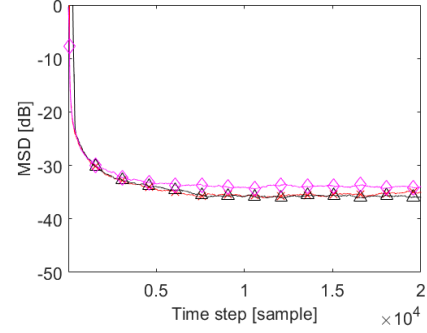
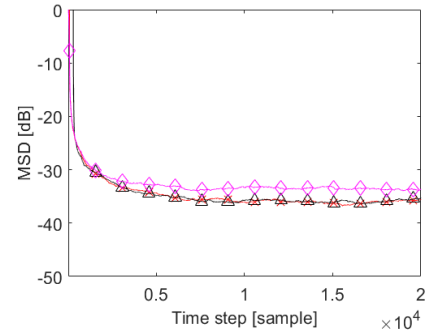
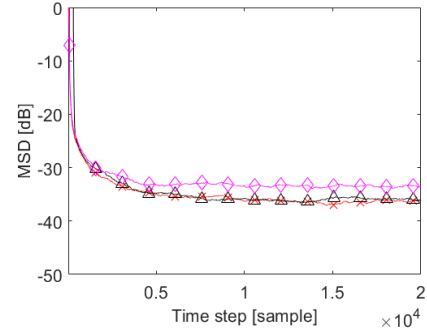
(a) $S^\dagger = 32$ (b) $S = 16$ (c) $S = 8$

Fig. 2. (Color available online) Convergence comparison between conventional RTLS and the proposed algorithm (—x—: the conventional RTLS, —△—: the proposed algorithm, —◇—: the algorithm in Reference [10])[†] (S is the number of non-zero coefficients).

4.2 알고리즘의 견실성 실험

본 실험은 제안된 알고리즘이 자기 상관의 역행렬을 사용하는 기존 RTLS에 대해 수치적으로 더 견실하다는 것을 보여준다. 수치적 견실성을 보여주기 위해 양자화를 사용하여 유한 정밀도 환경 하에서 채널 추정을 수행한다. 유한한 비트를 사용하는 양자화 실험의 이유는 알고리즘 연산중에 수치 오류를 유도하기 위해 양자화 노이즈 상황을 도출하

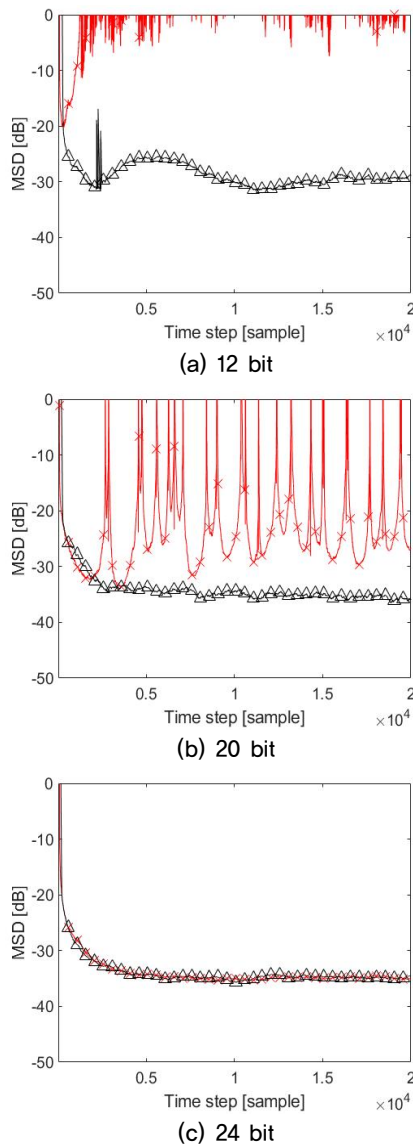


Fig. 3. (Color available online) Numerical robustness comparison between conventional RTLS and the proposed algorithm according to the number of bits change ($-x-$: the conventional RTLS, $-\Delta-$: the proposed algorithm).

고 자기 상관 행렬의 역행렬 연산에 오류를 포함하기 위함이다.

이러한 상황을 보이기 위해 양자화 비트 수를 24 비트, 20 비트와 12 비트로 변경하여 채널 추정 성능을 비교했다. 이때 채널 중 영이 아닌 계수의 숫자는 32개로 하였다.

Fig. 3은 제안된 알고리즘과 기존 RTLS의 성능을 서로 다른 양자화 비트 수를 갖는 MSD 측면에서 비

교한 결과를 보여준다. Fig. 3의 결과를 통해 보면, 유한 비트를 사용하여 양자화 된 환경에서 사용할 경우 Reference [3]의 RTLS는 20 비트 상황부터 양자화 잡음의 오류 누적 효과로 인해 발산되는 것을 볼 수 있다. 이에 반하여 제안된 알고리즘은 16 비트까지는 정상적으로 수렴하는 것도 관찰할 수 있고, 12 비트부터 발산하기 시작함을 관찰할 수 있다. 본 실험을 통하여 제안된 알고리즘이 기존 RTLS보다 수치적으로 더 견실함을 보여준다.

V. 결론

본 논문은 RTLS와 유사한 수렴 성능을 내면서도 수치적으로 견실한 새 RTLS 알고리즘을 제안했다. 수렴성과 수치적 견실화를 동시에 이루기 위해서 IWF를 도입한 RTLS 알고리즘을 제안했다.

시뮬레이션을 통해서 수렴 성능이 기존의 RTLS와 유사함을 보였다. 그뿐만 아니라 양자화 오차에 대해서도 기존의 RTLS 보다 훨씬 견실함을 보였다.

References

1. C. Davila, "An efficient recursive total least squares algorithm for FIR adaptive filtering," *IEEE Trans Signal Process.* **42**, 268-280 (1994).
2. R. Arablouei, K. Dogancay, and S. Werner, "Recursive total least-squares algorithm based on inverse power method and dichotomous coordinate-descent iterations," *IEEE Trans Signal Process.* **63**, 1941-1949 (2015).
3. N. Choi, J. Lim, J. Song, and K. Sung, "Adaptive system identification using an efficient recursive total least squares algorithm" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **22**, 93-100 (2003).
4. J. Lim, "Error in variable FIR typed system identification using combining total least mean squares estimation with least mean squares estimation" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **29**, 97-101 (2010).
5. J. Lim and Y. Pyeon, "FIR system identification method using collaboration between RLS (recursive least squares) and RTLS (recursive total least squares)" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **29**, 374-380 (2010).
6. J. Lim and H. Pang, "Reweighted l1 regularized TLS linear neuron for the sparse system identification," *Neurocomputing*, **173**, 1972-1975 (2016).
7. J. Lim and H. Pang, "Mixed norm regularized re-

- cursive total least squares for group sparse system identification,” *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* **30**, 664-673 (2016).
8. J. Lim and H. Pang, “l1-regularized recursive total least squares based sparse system identification for the error-in-variables,” *SpringerPlus*, **5**, 1-9 (2016).
 9. A. H. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering* (Wiley, NewYork, 2003), pp. 212-280.
 10. B. Xi and Y. Liu, “Iterative Wiener filter,” *Electronics Letters*, **28**, 1892-1899 (2013).
 11. J. Lim, “L1-norm iterative wiener filter for sparse channel estimation,” *Circuits Syst Signal Process.* **39**, 6386-6393 (2020).

저자 약력

▶ 임 준 석 (Jun-Seok Lim)



1986년: 서울대학교 전자공학과 학사 졸업
 1988년: 서울대학교 전자공학과 석사 졸업
 1996년: 서울대학교 전자공학과 박사 졸업
 1998년 ~ 1992년: 국방과학연구소
 1996년 7월 ~ 1997년 10월: LG종합기술원
 1998년 3월 ~ 현재: 세종대학교 전자정보
 통신공학과 교수